# 第5章　機率分配

## 觀念題

**1.** (a) 間斷隨機變數

可能值為：$0, 1, 2, \cdots$

(b) 連續隨機變數

可能值為：$[0, \infty]$

(c) 間斷隨機變數

可能值為：$0, 1, 2, \cdots$

(d) 連續隨機變數

可能值為：$[0, \infty]$

(e) 間斷隨機變數

可能值為：$0, 1, \cdots, 20$

**2.**

| $f(x, y)$ | | $y=-1$ | $y=0$ | $y=1$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
| | 1 | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $h(y)$ | | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 |

$$E(XY) = 1 \times (-1) \times \frac{1}{5} + 1 \times 1 \times \frac{1}{5} = 0$$

94.6.7三校

$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

$E(Y) = -1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = 0$

$E(XY) = 0 = E(X) \cdot E(Y)$

但$X, Y$並不獨立($\because f(x, y) \neq g(x)h(y)$)

**3.** 此敘述不正確，因不知 $X$ 與 $Y$ 是否獨立，故無法因邊際分配而得知聯合分配。

**4.** 可從機率分配的性質及計算方法來比較間斷機率分配與連續機率分配

**5.** $E(X_i) = P_i$ , $Var(X_i) = P_i(1 - P_i)$

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} P_i(1 - P_i)$$

**6.** (a) $E(U) = E(X - Y + Z) = E(X) - E(Y) + E(Z) = 20 - 14 + 10$

$= 16$

$\because$ $X$、$Y$、$Z$為獨立變數

$\therefore V(U) = V(X + Y + Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) = 5 + 3 + 2$

$= 10$

(b) $E(T) = E(2Y - X - 2Z) = 2E(Y) - E(X) - 2E(Z)$

$= 2 \times 14 - 20 - 2 \times 2 = 4$

$\therefore V(T) = V(2Y - X - 2Z) = 4 \cdot V(Y) + V(X) + 4V(Z)$

$= 4 \times 3 + 5 + 4 \times 2 = 25$



94.6.7三校

(c) $U+T=X-Y-Z+2Y-X-2Z=Y-Z$

$\therefore E(W)=E(Y)-E(Z)=14-10=4$

$V(W)=V(Y)+V(Z)=3+2=5$

**7.** $\because E(X|Y)=2Y^2$

$\Rightarrow\ E(E(X|Y))=E(2Y^2)$

$\Rightarrow\ E(X)=2E(Y^2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$

$\therefore E(Y|X)=-3+0.5X$

$\Rightarrow\ E(E(Y|X))=E(-3+0.5X)$

$\Rightarrow\ E(Y)=-3+0.5E(X)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$

$\because V(X)=4,\ E(Y)=0$

將 $E(Y)=0$ 帶入 $(b)$ 中

$\Rightarrow 0=-3+0.5E(X)$

$\Rightarrow E(X)=6$

將 $E(X)=6$ 帶入 $(a)$ 式

$\Rightarrow E(Y^2)=\dfrac{E(X)}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

$\Rightarrow V(X)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

$\Rightarrow 3-0^2=3$

$\because\ E(Y|E)=-3+0.5X$ 時， $0.5=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X^2}$

$\therefore$ 依題意知 $0.5=\dfrac{Cov(X,Y)}{4}$

$\Rightarrow\ Cov(X,Y)=2$

**8.** $Cov(aX+b\ ,\ cY+d)$

$=E[((aX+b)-(a\mu_X+b))((cY+d)-(c\mu_Y+d))]$

$= E[(aX - a\mu_X)(cY - c\mu_Y)]$

$= Cov(aX\ ,\ cY) = ac\,Cov(X, Y)$

## 計算與應用題

**1.** $X$： 2數之和

(a)

| $s$ | $X$ 值 |
|---|---|
| 1, 3 | 4 |
| 1, 5 | 6 |
| 1, 7 | 8 |
| 1, 9 | 10 |
| 3, 5 | 8 |
| 3, 7 | 10 |
| 3, 9 | 12 |
| 5, 7 | 12 |
| 5, 9 | 14 |
| 7, 9 | 16 |

(b) $X = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ or $16$

**2.** $X$，猜對之題數

(a) $X = 0, 1, 2, 3$

(b) $P(X=0) = f(0) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(X=1) = f(1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{24}$

$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$



94.6.7三校

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{11}{24}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{24}$ |

(c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = \dfrac{3}{4}$

**3.** (a) $\because Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 34 - 25 = 9$

$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = 3$

因此， $P(|X-3| \leq 4.8) = P(|X-3| \leq 1.6\sigma_X) \geq 1 - \dfrac{1}{1.6^2}$

$= 0.61$

(b) $P(|X-3| \geq c) = P\left(|X-3| \geq \dfrac{c}{3}\sigma_X\right) \leq \dfrac{9}{c^2} = 0.16$

$\Rightarrow\ c = 7.5$

(c) $V(X) = 9$， $V(Y) = 9V(X) = 81$

$E(XY) = E(3X^2 - X) = 3E(X^2) - E(X) = 51$

(d) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 51 - 3(3 \times 3 - 1) = 27$

**4.** $X$：檢驗過程所出現的良品數

$P$：不良率

(a) 設 D 表不良品

G 良品

| $s$ | $X$ |
|---|---|
| DD | 0 |
| DGD | 1 |
| GDD | 1 |
| DGGD | 2 |
| GDGD | 2 |
| GGDD | 2 |
| ⋮ | ⋮ |

(b) $f(x)=\binom{x+1}{1}P^2(1-P)^x=(x+1)P^2(1-P)^x \ \ x=0,\,1,\,2,\,\cdots$

(c) $P=0.1 \ \Rightarrow \ P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$

$$=0.01+0.018=0.028$$

**5.** (a) $f(x)=k(1+x^2) \ \ x=-1,\,0,\,1,\,2$

$$\sum_{x=-1}^{2} f(x)=1=k(2+1+2+5) \ \Rightarrow \ k=\frac{1}{10}$$

(b) $P(X<2)=1-P(X=2)=1-\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

(c) $E(X)=\displaystyle\sum_{i=-1}^{2} x\cdot f(x)$

$$=(-1)\frac{2}{10}+0\cdot\frac{1}{10}+1\cdot\frac{2}{10}+2\cdot\frac{5}{10}=1$$

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$E(X^2)=\dfrac{2}{10}+\dfrac{2}{10}+4\cdot\dfrac{5}{10}=\dfrac{12}{15}$

$\therefore Var(X)=\dfrac{12}{5}-1^2=\dfrac{7}{5}$

**6.** (a) $f(x)=kx(1-x) \ \ 0<x<1$

$$\int_0^1 f(x)dx=1=1\int_0^1 k(x-x^2)dx=k\cdot\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{1}=\frac{k}{6}$$

$\therefore k=6$

(b) $P(X\geq 0.2)=\displaystyle\int_{0.2}^1 6(x-x^2)dx=6\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0.2}^{1}$

$$=(3x^2-2x^3)\Big|_{x=0.2}^{1}=1-(0.12-0.016)=0.896$$

(c) $\mu=\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(6x^2-6x^3)dx=\left(2x^3-\frac{3}{2}x^4\right)\Bigg|_{x=0}^{1}$

$$=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$



94.6.7 三校

**7.** (a) $1=\sum_{x}\sum_{y}f(x,\, y)=k\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=1}^{2}(x+y)$

$=k[(0+1)+(0+2)+(1+1)+(1+2)+(2+1)+(2+2)]$

$=15\cdot k$

$\therefore\ k=\frac{1}{15}$

$g(x)=\sum_{y=1}^{2}f(x,\, y)=\frac{1}{15}(2x+3)\ \ x=0,\, 1,\, 2$

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{15}$ |

$g(0)=P(X=0,\, Y=1)+P(X=0,\, Y=2)=\frac{1}{5}$

$g(1)=P(X=1,\, Y=1)+P(X=1,\, Y=2)=\frac{1}{3}$

$g(3)=P(X=2,\, Y=1)+P(X=2,\, Y=2)=\frac{7}{15}$

$h(y)=\sum_{x=0}^{2}f(x,\, y)=\frac{1}{5}(y+1)\ \ y=1,\, 2$

$h(1)=P(X=0,\, Y=1)+P(X=1,\, Y=1)$

$+P(X=2,\, Y=1)=\frac{2}{5}$

$h(2)=P(X=0,\, Y=2)+P(X=1,\, Y=2)$

$+P(X=2,\, Y=2)=\frac{3}{5}$

| $y$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $h(y)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |



94.6.7 三校

(b) $E(X)=\sum_{x=0}^{2} x\cdot g(x)=\frac{1}{3}+\frac{14}{15}=\frac{19}{15}$

$E(Y)=\sum_{y=1}^{2} y\cdot h(y)=\frac{2}{5}+\frac{6}{5}=\frac{8}{5}$

$E(XY)=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=1}^{2} xyf(x,y)=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=1}^{2} xy\cdot\frac{1}{15}(x+y)$

$=1\cdot 1\cdot\frac{2}{15}+1\cdot 2\cdot\frac{3}{15}+2\cdot 1\cdot\frac{3}{15}+2\cdot 2\cdot\frac{4}{15}$

$=\frac{30}{15}=2$

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$E(X^2)=\sum_{x=0}^{2} x^2\cdot g(x)=\frac{1}{3}+4\cdot\frac{7}{15}=\frac{33}{15}$

$Var(X)=\frac{33}{15}-\left(\frac{19}{15}\right)^2=\frac{266}{225}$

$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

$E(Y^2)=\sum_{y=1}^{2} y^2\cdot h(y)=\frac{2}{5}+4\cdot\frac{3}{5}=\frac{14}{5}$

$Var(Y)=\frac{14}{5}-\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{6}{25}$

(c) $f(0,1)=\frac{1}{15}\neq g(0)\cdot h(1)=\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$

$\therefore X, Y$ 不互相獨立

(d) $P(X\le 2, Y=1)=P(Y=1)=h(1)=\frac{2}{5}$

$P(X>1, Y\le 1)=P(X=2, Y=1)=\frac{1}{15}(2+1)=\frac{1}{5}$

$P(X+Y=2)=P(X=0, Y=2)+P(X=1, Y=1)$



94.6.7三校

$$= \frac{1}{15}(2+2) = \frac{4}{15}$$

$$P(X > Y) = P(X = 2, Y = 1) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

(e) $P(X = 2|Y = 1) = \dfrac{P(X = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{2}$

$$P(Y = 1|X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(X = 2)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{3}{7}$$

(f) $Z = X + Y$

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{15}$ |

| $y$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $h(y)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |

| $z$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(z)$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{15}$ |

$$f(1) = P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{15}$$

$$f(2) = P(X = 0, Y = 2) + P(X = 1, Y = 1) = \frac{4}{15}$$

$$f(3) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$f(4) = P(X = 2, Y = 2) = \frac{4}{15}$$



94.6.7 三校

$$E(Z)=\sum_{z=1}^{4} z\cdot f(z)=\frac{1}{15}+2\cdot\frac{4}{15}+3\cdot\frac{6}{15}+4\cdot\frac{4}{15}=\frac{43}{15}$$

$$Var(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2$$

$$E(Z^2)=\sum_{z=1}^{4} z^2 f(z)=\frac{1}{15}+\frac{16}{15}+\frac{54}{15}+\frac{64}{15}=\frac{135}{15}=9$$

$$\therefore\ Var(Z)=9-\left(\frac{43}{15}\right)^2=\frac{176}{225}$$

(g) $E(X^2Y)=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=1}^{2} x^2 y f(x\cdot y)$

$$=1^2\cdot 1\cdot\frac{2}{15}+1^2\cdot 2\cdot\frac{3}{15}+2^2\cdot 1\frac{3}{15}+2^2\cdot 2\frac{4}{15}$$

$$=\frac{52}{15}$$

(h) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$=2-\frac{19}{15}\times\frac{8}{5}=\frac{-2}{75}$$

**8.** (a) $\int_0^1\int_0^y 6x\,dx\,dy=\int_0^1\left(3x^2\Big|_0^y\right)dy=\int_0^1 3y^2dy=y^3\Big|_0^1=1$

由此可知，$f(x,y)$ 為一良好之 $p.d.f$。

(b) $f(x)=\int_x^1 6x\,dy=6x\int_x^1 1dy=6x\left(y\Big|_x^1\right)=6x(1-x)$

(c) $\because\ E(Y|X=x)=\int f(y)\cdot f(Y|x=x)dy$

$\therefore$ 先求$f(Y|X=x)=\dfrac{f(X,Y)}{f(X)}=\dfrac{6x}{6x(1-x)}$

再求$E(Y|X=x)=\int_x^1\cdot\dfrac{1}{(1-X)}dy=\left.\dfrac{y^2}{2(1-x)}\right|_x^1=\dfrac{1+x}{2}$



94.6.7 三校

**9.** (a)

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 總和 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.05 | 0.05 | 0.1 | 0 | 0.2 |
| 1 | 0.05 | 0.1 | 0.25 | 0.1 | 0.5 |
| 2 | 0 | 0.15 | 0.1 | 0.05 | 0.3 |
| 總和 | 0.1 | 0.3 | 0.45 | 0.15 | 1 |

$\because \sum_{i=1}^{n} f(X_i) = 1$

$\therefore 1 - 0.2 - 0.5 = 0.3 \Rightarrow f_X(X = 2)$

$\because f_Y(Y) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i|Y)$

$\therefore 0.45 - 0.25 - 0.1 = 0.1 \Rightarrow f(X = 0, Y = 2)$

$\because$ 已知 $P(Y = 0|X = 2) = 0$

$\therefore \dfrac{P(Y = 0, X = 2)}{P(X = 2)} = 0 \Rightarrow P(Y = 0, X = 2) = 0$

設： $P(X = 1, Y = 3) = 2P$， $P(X = 1, Y = 0) = P$

則 $f_X(X = 1) = \sum_{j=1}^{k} f(Y_j|X) \Rightarrow P + 0.1 + 0.25 + 2P = 0.5 \Rightarrow$

$P = 0.05$

依此概念，則可推導出Y與X之聯合機率函數之各值。

(b)

| $T$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(T)$ | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.2 | 0.05 |

(c) $E(X) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.3 = 1.1$

$E(X^2) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.5 + 4 \times 0.3 = 1.7$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.7 - (1.1)^2 = 0.49$

$\because Cov(X, Y) = E(XY)E(X)E(Y)$

$\therefore$ 先求出 $E(Y) = 0\times0.1+1\times0.3+2\times0.45+3\times0.15 = 1.65$

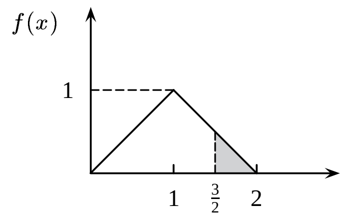
$\therefore Cov(X,Y) = 1.9-(1.1)(1.65) = 0.085$

**10.** 依題意知三角形的面積為 1

$\therefore \frac{1}{2}(a)(1) = 1$，因此 $a = 2$

於是，$P\left(X > \frac{3}{2}\right)$ = 陰影三角形的面積

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$




**11.** $X$：紅球的個數　$X = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$Y$：白球的個數　$Y = 0,\ 1,\ 2$

(a) $f(x,\ y) = \dfrac{C_x^3 C_y^2 C_{(4-x-y)}^3}{C_4^8}$　$1 \le x+y \le 4$

| | | $y$ = 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0 | $\frac{2}{70}$ | $\frac{3}{70}$ |
| | 1 | $\frac{3}{70}$ | $\frac{18}{70}$ | $\frac{9}{70}$ |
| | 2 | $\frac{9}{70}$ | $\frac{18}{70}$ | $\frac{3}{70}$ |
| | 3 | $\frac{3}{70}$ | $\frac{2}{70}$ | 0 |



94.6.7 三校

(b) $P(X+Y \leq 2) = P(X=0,\, Y=1) + P(X=0,\, Y=2)$

$$+P(X=1,\, Y=0) + P(X=1,\, Y=1)$$

$$+P(X=2,\, Y=0)$$

$$= \frac{2+3+3+18+9}{70} = \frac{1}{2}$$

**12.** $f(x) = \frac{60}{77}\frac{1}{x}$，$x = 2,\, 3,\, 4,\, 5$

$$E(X) = \sum_{x=2}^{5} x f(x) = \frac{240}{77}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^{5} x^2 \cdot f(x) = \frac{60}{77}(2+3+4+5) = \frac{120}{11}$$

$$Var(X) = \frac{120}{11} - \left(\frac{240}{77}\right)^2 = 1.1941$$

標準差 $= 1.093$

**13.** (a) 三次均未出現紅色 $X = -15$

出現一次紅色 $X = -5$

出現二次紅色 $X = 5$

出現三次紅色 $X = 15$

$$P(X=-15) = \frac{20}{38} \cdot \frac{20}{38} \cdot \frac{20}{38} = \frac{1000}{6859}$$

$$P(X=-5) = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{18}{38} \cdot \frac{20}{38} \cdot \frac{20}{38} = \frac{2700}{6859}$$

$$P(X=5) = \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{18}{38} \cdot \frac{18}{38} \cdot \frac{20}{38} = \frac{2430}{6859}$$

$$P(X=15) = \frac{18}{38} \cdot \frac{18}{38} \cdot \frac{18}{38} = \frac{729}{6859}$$



94.6.7 三校

(b) $E(X) = (-15) \cdot \frac{1000}{6859} + (-5)\frac{2700}{6859} + 5 \cdot \frac{2430}{6859} + 15 \cdot \frac{729}{6859}$

$= -\frac{5415}{6859} \doteq -0.7895$

標準差 $= \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}$

$E(X^2) = (-15)^2 \cdot \frac{1000}{6859} + (-5)^2\frac{2700}{6859} + 5^2 \cdot \frac{2430}{6859} + 15^2\frac{729}{6859}$

$= \frac{517275}{6859} \doteq 75.4155$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= 75.4155 - (-0.7895)^2 = 74.7299$

標準差 $= \sqrt{74.7922} = 8.6482$

(c) 若次替押注紅色與黑色，則其預期得利相同。因為每次賭局中，不出現紅色與不出現黑色的機率相同。

**14.**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.1 | 0.3 | 0.5 | 0.1 |
| $y = x^2 + 2x$ | 0 | 3 | 8 | 15 |

$$E(Y) = \sum_{x=0}^{3}(x^2 + 2x)f(x) = 3 \times 0.3 + 8 \times 0.5 + 15 \times 0.1 = 6.4$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) = \sum_{x=0}^{3}(x^2 - 2x)^2 f(x) = 3^2 \times 0.3 + 8^2 \times 0.5 + 15^2 \times 0.1 = 57.2$$

$$Var(Y) = 57.2 - 6.4^2 = 16.24$$

**15.** $\mu = 75$ , $\sigma = 3$，

利用 Chebyshev 定理 $P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

$$P(69 < X < 81) = P(|X - 75| < 2 \times 3) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 75\%$$



94.6.7 三校

至少有 $500 \times 0.75 = 375$(人)的成績介於 69 分到 81 分之間

**16.** (a) $P(X=1,\,Y=2)=\dfrac{1}{30}$

(b) $P(X=0, 1 \le Y < 3) = P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2)$
$= \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$

(c) $P(X+Y \le 1) = P(X=0,\,Y=0) + P(X=0,\,Y=1)$

$+P(X=1,\,Y=0) = \dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$

(d) $P(X>Y) = P(X=1,\,Y=0) + P(X=2,\,Y=0)$

$+P(X=2,\,Y=1) = \dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{40}=\dfrac{27}{120}=\dfrac{9}{40}$

(e) $P(X=0|Y=2) = \dfrac{P(X=0,\,Y=2)}{P(Y=2)} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{30}} = \dfrac{15}{19}$

(f)

| | | $y$ 0 | 1 | 2 | 3 | $g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{59}{120}$ |
| | 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{30}$ | | $\frac{54}{120}$ |
| | 2 | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{40}$ | | | $\frac{7}{120}$ |
| | $h(y)$ | $\frac{34}{120}$ | $\frac{63}{120}$ | $\frac{19}{120}$ | $\frac{4}{120}$ | 1 |

$f(0,\,0)=\dfrac{1}{12}\neq\dfrac{34}{120}\times\dfrac{59}{120}=P(X=0)\cdot P(Y=0)$

$\therefore\ X,Y$ 不獨立

**17.** (a) $E(X)=(-500)\times 0.4+2000\times 0.6=1000$

$E(100X)=10^5$



94.6.7 三校

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = 2500000$

$Var(100X) = (10^2)^2 \times 1.5 \times 10^6 = 1.5 \times 10^{10}$

(b) $E(Y) = 0 \times 0.6 + 2500 \times 0.4 = 10^3$

$E(100Y) = 100 \times 10^3 = 10^5$

$E(Y^2) = 2.5 \times 10^6$

$Var(Y) = 2.5 \times 10^6 - (10^3)^2 = 1.5 \times 10^6$

$Var(100Y) = 1.5 \times 10^{10}$

(c) $E(50X + 50Y) = 50E(X) + 50E(Y) = 10^5$

$Var(50X + 50Y) = 50^2 \times Var(X) + 50^2 \times Var(Y) = 7.5 \times 10^9$

(d) 三者投資策略之期望利得雖相同，但 (c) 之變異數 $7.5 \times 10^9 < 1.5 \times 10^{10}$ 故 (c) 之風險較小

**18.** 令 $X$ 與 $Y$ 分別代表 $A$、$B$ 零件之長度的隨機變數，則 $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 4 = 6$ (公分)

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 1^2 + 2^2 = 5$

所以新零件長度的標準差為 $\sqrt{5}$ 公分

**19.** (a)

| $f(x, y)$ | | $x$ = 1 | 2 | 3 | 4 | $h(y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 0.04 | 0.14 | 0.23 | 0.07 | 0.48 |
| | 2 | 0.07 | 0.17 | 0.23 | 0.05 | 0.52 |
| $g(x)$ | | 0.11 | 0.31 | 0.46 | 0.12 | 1 |

(b) $P(Y=1|X=1) = \dfrac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \dfrac{4}{11}$

$P(Y=2|X=1) = \dfrac{P(X=1, Y=2)}{P(X=1)} = \dfrac{7}{11}$



94.6.7 三校

| $y$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $f(y\|x)$ | $\frac{4}{11}$ | $\frac{7}{11}$ |

$$P(X=1|Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{4}{48}=\frac{1}{12}$$

$$P(X=2|Y=1)=\frac{14}{48}=\frac{7}{24}$$

$$P(X=3|Y=1)=\frac{23}{48}$$

$$P(X=4|Y=1)=\frac{7}{48}$$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x\|y)$ | $\frac{4}{48}$ | $\frac{14}{48}$ | $\frac{23}{48}$ | $\frac{7}{48}$ |

(c) $P(X=1, X+Y\geq 1)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)=0.11$

$P(X+Y<4)=P(X+Y\leq 3)$

$=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)$

$=0.04+0.07+0.14=0.25$

$P(1\leq X+Y<3)=P(1\leq X+Y\leq 2)=P(X=1,Y=1)=0.04$

(d) $P(Y=1|X=2)=\frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=2)}=\frac{14}{31}$

$P(X=2|Y=1)=\frac{14}{48}=\frac{7}{24}$

(e) $E(X)=1\times 0.11+2\times 0.31+3\times 0.46+4\times 0.12=2.59$

$E(Y)=1\times 0.48+2\times 0.52=1.52$

$E(X^2) = 1^2 \times 0.11 + 2^2 \times 0.31 + 3^2 \times 0.46 + 4^2 \times 0.12 = 7.41$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 7.41 - 6.7081 = 0.7019$

$E(Y^2) = 1^2 \times 0.48 + 2^2 \times 0.52 = 2.56$

$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 0.2496$

(f) $E(XY) = \sum_x \sum_y xyf(x, y)$

$= 1 \times 1 \times 0.04 + 1 \times 2 \times 0.14 + 1 \times 3 \times 0.23 + 1 \times 4 \times 0.07$

$+ 2 \times 1 \times 0.07 + 2 \times 2 \times 0.17 + 2 \times 3 \times 0.23 + 2 \times 4 \times 0.05$

$= 3.89$

(g) $\because f(1, 1) = P(X = 1, Y = 1) = 0.04$

$\neq P(X = 1)P(Y = 1) = 0.11 \times 0.48 = 0.0528$

$\therefore X, Y$ 不獨立

(h) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$

$= 0.7019 + 0.2496 - 2 \times 0.0468$

$= 0.8579$

$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= 3.89 - (2.59)(1.52)$

$= -0.0468$

**20.** (a) $E(P) = E(2X - 3Y + 4Z) = 2E(X) - 3E(Y) + 4E(Z) = -7$

$Var(P) = 2^2 \cdot Var(X) + (-3)^2 \cdot Var(Y) + 4^2 Var(Z)$

$= 4 \times 3 + 9 \times 7 + 16 \times 5 = 155$

(b) $E(Q) = E(X + 2Y - Z) = E(X) + 2E(Y) - E(Z) = 4 + 18 - 3$

$= 19$

$Var(Q) = Var(X) + 2^2 \cdot Var(Y) + (-1)^2 \cdot Var(Z) = 3 + 28 + 5$

$= 36$



94.6.7 三校

(c) $E(X^2)=19$ , $E(Y^2)=88$ , $E(Z^2)=14$

$$Cov(P,Q)=E(PQ)-E(P)E(Q)$$
$$=E[(2X-3Y+4Z)(X+2Y-Z)]-(-7)(19)=-56$$

**21.** (a) $X$：第一次出現正面的次數 $X=0,\ 1$

(b) $Y$：兩次出現正面的次數 $X=0,\ 1,\ 2$

| $f(x,y)$ | | $y=0$ | $y=1$ | $y=2$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 0.16 | 0.24 | 0 | 0.40 |
| | 1 | 0 | 0.24 | 0.36 | 0.60 |
| $h(y)$ | | 0.16 | 0.48 | 0.36 | 1 |

$f(0,\ 0)=P$(第一次出現反現，兩次均未出現正面)
$=(1-0.6)^2=0.16$

$f(0,\ 1)=(1-0.6)\times 0.6=0.24$

$f(0,\ 2)=0=f(1,\ 0)$

$f(1,\ 1)=0.6\times(1-0.6)=0.24$

$f(1,\ 2)=0.6\times 0.6=0.36$

(c) $P(Y=1|X=0)=\dfrac{P(X=0,\ Y=1)}{P(X=0)}=\dfrac{24}{40}=\dfrac{3}{5}$

$P(X=0,\ Y=1)=\dfrac{P(X=0,\ Y=1)}{P(Y=1)}=\dfrac{24}{48}=\dfrac{1}{2}$

(d) $P(X\le 1,\ Y\le 1)$

$=P(X=0,\ Y=0)+P(X=0,\ Y=1)$
$\quad+P(X=1,\ Y=0)+P(X=1,\ Y=1)$

$=0.64$

$P(0\le X+Y\le 2)=0.16+0.48=0.64$

(e) $f(0, 0) = P(X = 0, Y = 0) = 0.16 \neq P(X = 0)P(Y = 0)$

$= 0.064$

$\therefore X, Y$ 不獨立

**22.** 計算 $X$ 與 $Y$ 的期望值，得 $E(X) = 1$， $E(Y) = 0.9$，因此甲機率的效率較高。

**23.** $x_i = \begin{cases} 1 & \text{在第 } i \text{ 個車站有下車的旅客} \\ 0 & \text{其他情形} \end{cases}$

其中 $i = 1, , \cdots, 10$

依題意知，任一旅客在第 $i$ 個車站不下車的機率為 $\frac{9}{10}$，且每位旅客是否下車是彼此獨立的。因此， 20個旅客在第 $i$ 個車站皆不下車的機率為 $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$；相反的，在第 $i$ 個車站有人下車的機率為 $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$。因此， $x_i$ 的機率分配為

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$ | $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$ |

所以， $E(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}$，令 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$ 故

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}) = 10\left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right] = 8.784$。

**24.** 令 $X = i$ 表示第 $i$ 次射擊首次擊中目標， $Y = j$ 表示第 $i$ 次射擊第二次擊中目標。因此， $X = i, Y = j(i < j)$ 表示在第 $i$ 次與 $j$ 次皆擊中目標，而其餘 $j - 2$ 次皆未擊中目標。

(a) $P(X=i, Y=j) = P_{ij} = p^2q^{j-2}$ $\quad i = 1, 2, \cdots$

$j = i+1, i+2, \cdots$, 且 $q = 1-p$

(b) 邊際機率分配

$$P(X=i) = \sum_{j=i+1}^{\infty} P_{ij} = \sum_{j=i+1}^{\infty} p^2q^{j-2} = pq^{i-1},\ i = 1, 2, \cdots$$

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{j-1} P_{ij} = \sum_{i=1}^{j-1} p^2q^{j-2} = (j-1)p^2q^{j-2},\ j = 2, 3, \cdots$$

**25.** (a) $X$ 之邊際機率分配表：

| $X$ | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|
| $f(X)$ | 7/36 | 9/36 | 9/36 | 11/36 |

$Y$ 之邊際機率分配表：

| $Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f(Y)$ | 5/18 | 6/18 | 7/18 |

(b) $E(X) = 110/3 = 36.67$

在 $Y = 0, 1, 2$ 時，$X$ 之條件機率函數：

| $X$ | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|
| $f(X\|Y=0)$ | 1/10 | 2/10 | 3/10 | 4/10 |
| $f(X\|Y=1)$ | 1/8 | 2/8 | 2/8 | 3/8 |
| $f(X\|Y=2)$ | 9/28 | 8/28 | 6/28 | 5/28 |

$\Rightarrow E(X|Y=0) = 40$，$E(X|Y=1) = 38.75$，

$E(E|Y=2) = 32.5$

(c) $V(X) = 1100/9 = 122.22$。

$V(X|Y=0) = 100$，$V(X|Y=1) = 110.9375$，$V(X|Y=2) = 32.5$。

**26.** 設 $X$ 與 $Y$ 分別表示粉彩眼影與閃亮唇蜜

(a) $X$ 與 $Y$ 的聯合機率分配表



94.6.7 三校

| Y \ X | 30 | 35 | 40 | 45 |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 0 | 0.1 | 0 | 0 |
| 35 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 40 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0 |
| 45 | 0 | 0 | 0.1 | 0 |
| 50 | 0 | 0 | 0 | 0.1 |

$X$(粉彩眼影)的邊際機率分配：

| $X$ | 30 | 35 | 40 | 45 |
|---|---|---|---|---|
| $f(X)$ | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.2 |

$Y$(閃亮唇蜜)的邊際機率分配：

| $Y$ | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(Y)$ | 0.1 | 0.4 | 0.3 | 0.1 | 0.1 |

(b) $E(X) = 37.5$， $V(X) = 26.25$； $E(Y) = 38.5$，
$V(Y) = 30.25$

(c) $E(XY) = 1,455 \Rightarrow Cov(X,Y) = 11.25$， $\rho_{XY} = 0.4$

(d) 不獨立。

(e) 令每日賣化妝品所得佣金 $S = 2X + 2Y$
$E(S) = 2E(X) + 2E(Y) = 152$，
$V(S) = 4V(X) + 4V(Y) + 8Cov(X,Y) = 316$



94.6.7 三校