第4章 機　率

觀念題

1. $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c) = 0.7 \times 0.5 = 0.35$

2. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

$= P(B) \cdot P(C|B) \cdot P(A|B \cap C)$

$= P(C) \cdot P(A|C) \cdot P(B|A \cap C) = \cdots$

3. $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.39 - 0.13 = 0.26$

4. $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} < \dfrac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$

$\therefore P(A/B) < P(A)$

5. $P(A \cap B) = 0$, $A \neq \phi$, $B \neq \phi \Rightarrow P(A)P(B) = P(A \cap B)$

pf：設 A, B 為獨立事件

$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0$

$\Rightarrow \quad P(A) = 0$ or $P(B) = 0$

$\therefore$ 若 A, B 為非空集合，且互斥事件，則 A, B 不會又為獨立事件

6. $P(A^c \cup B^c) = P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B)$

又， $P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cap B) = 1 - P(A^c) - P(B^c) + P(A^c \cap B^c)$

$\Rightarrow P(A \cap B) \leq 1 - P(A^c) - P(B^c)$

7. (a) 否。若 $(P \cap B) = 0$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - 0]$$
$$= 1 - P(A) - P(B)$$

不一定等於 0。

(b) 是。

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cup B)]$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B))$$
$$= P(\overline{A})P(\overline{B})$$

(c) 否。 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$。

(d) 否。 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$，若 A、 B 獨立， $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$。

8. (a) 否。 $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$ ($\because P(A) > 0, P(B) > 0$)，因此 A、 B 不獨立。

(b) 是。 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$，不意味 $P(A \cap B) = 0$，因此 A、 B 不一定為互斥事件。

(c) 是。 $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$； $\therefore P(A \cap B) \neq 0$。 A、 B 不互斥。

9. (a) 考慮製造原料與口感不為互斥事件。

(b) 女性男性為互斥事件。

(c) 薪資待遇、公司福利與前景、工作熱忱不為互斥事件。

(d) 統一、維力、其他廠商為互斥事件 (市佔率之取得)。

(e) 閱讀與戶外運動不為互斥事件。

94.6.7 三校

計算與應用題

1. (a) $s=\{GGGG\quad DGGG\quad GDGG\quad GGDG\quad GGGD$
$DDGG\quad DGDG\quad DGGD\quad GDDG\quad GDGD$
$GGDD\quad DDDG\quad DDGD\quad DGDD\quad GDDD$
$DDDD\}$

(b) $s=\{0, 1, 2, \cdots, 20\}$

(c) $s=\{DD, DGD, GDD, DGGD, GDGD, GGDD, \cdots\}$

(d) $s=\{t|12\leq t\leq 20\}$，t 表示時間，單位：秒

2. A：擲一骰子 3 次，至少發生一次 6 點

B：擲一骰子 3 次，至少發生一次 1 點

$$P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{n(A^c)}{n(s)}=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{91}{216}$$

$$P(B)=1-P(B^c)=1-\frac{n(B^c)}{n(s)}=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{91}{216}$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(s)}=\frac{6\times 6}{6^3}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{91}{216}+\frac{91}{216}-\frac{1}{6}=\frac{146}{216}$$

3. (a) P(只由你付帳)

$=P$(你擲正面其他 2 人反面)

$+P$(你擲反面，其他 2 人正面)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(b) P(三人平均付帳)

$=P$(三人皆擲正面) $+P$(三人皆擲反面)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

4. 設 A 表某生數學及格的事件

設 B 表某生英文及格的事件

$P(\text{兩科皆及格})=P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{14}{45}$

5. $P(\text{白球在 }A\text{ 袋})$

$=P(A\text{袋中抽 3 球不含白球})$

$\quad+P(A\text{袋中抽 3 球含白球且 }B\text{ 袋抽 4 球含白球})$

$$=\frac{\frac{4!}{3!1!}}{\frac{5!}{3!2!}}+\frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{5!}{3!2!}}\frac{\frac{8!}{3!5!}}{\frac{9!}{4!5!}}$$

$=\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{30}{45}=\dfrac{2}{3}$

$P(\text{白球在 }B\text{ 袋})=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

$=P(A\text{抽 3 球含白球且 }B\text{ 抽 4 球不含白球})$

$$=\frac{c^4_2\cdot c^1_1}{c^5_3}\times\frac{c^8_4\cdot c^1_1}{c^9_4}$$

6. $P(1)=P(5)=2P(2)=2P(4)$

$P(2)=P(4)=3P(3)$

$\because\ P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1$

$\Rightarrow\ 6P(3)+6P(3)+P(3)+3'P(3)+3P(3)=1$

$\Rightarrow\ P(3)=\dfrac{1}{19}$

$P(2)=P(4)=\dfrac{3}{19}$

$P(1)=P(5)=\dfrac{6}{19}$

94.6.7三校

7. 設 $A_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 個人拿到自己的雨傘之事件，則至少有一人拿到自己的傘之事件為一聯合事件 $A_1\cup A_2\cup A_3$，其機率為

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}=0.667$$

8. (a) 若抽出後放回，則

$$P(\text{同為上籤或同為中籤})=P(\text{同為上籤})+P(\text{同為中籤})=\frac{12}{24}\times\frac{12}{24}+\frac{2}{24}\times\frac{2}{24}=\frac{37}{144}=0.257$$

(b) 若抽出後不放回，則

$$P(\text{同為上籤或同為中籤})=P(\text{同為上籤})+P(\text{同為中籤})=\frac{12}{24}\times\frac{11}{23}+\frac{2}{24}\times\frac{1}{23}=\frac{67}{276}=0.243$$

9. A,B,C 互斥 $\Leftrightarrow P(A\cap B)=0$

$P(B\cap C)=0$

$P(A\cap C)=0$

$P(A\cap B\cap C)=0$

(a) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)=0.7$

(b) $P[A^c\cap(B\cup C)]=P(B\cup C)=0.5$

(c) $P(B\cup C^c)^c=1-P(B\cup C^c)=1-P(C^c)=P(C)=0.2$

94.6.7 三校

10. $A \cup B = s \qquad P(A \cup B) = 1$

$A \cap B = \phi \qquad P(A \cap B) = 0$

$P(B) = 2P(A)$

$$1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + 2P(A)$$

$$\therefore\ P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{2}{3}$$

$$P(B^c) = \frac{1}{3}$$

11. (a) $P(E) = P(THT) + P(HTT) + P(TTH) + P(TTT)$

$$= 0.1 + 0.15 + 0.1 + 0.15 = 0.5$$

$$P(F) = P(HHH) + P(TTT) = 0.3$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$0.5 + 0.3 - P(TTT) = 0.8 - 0.15 = 0.65$$

$$P(E \cap F) = P(TTT) = 0.15$$

(b) $P(G) = P(HHH) + P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$

$$= 0.15 + 0.1 + 0.1 + 0.15 = 0.5$$

$$P(H) = 1 - P(H^c) = 1 - P(F) = 0.7$$

$$P(G \cap H) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = 0.35$$

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(G \cap H) = 0.85$$

12. (a) $P($至少參加一項運動$) = P($足球$\cup$籃球$\cup$棒球$)$

$= P($足球$) + P($籃球$) + P($棒球$) - P($足球$\cap$籃球$)$

$- P($足球$\cap$棒球$) - P($籃球$\cap$棒球$) + P($三者皆參加$)$

$= 30\% + 20\% + 20\% - 5\% - 10\% - 5\% + 2\% = 52\%$

94.6.7 三校

(b) P(只參加足球)

$= P$(足球) $- P$(足球∩籃球) $- P$(足球∩棒球)

$+ P$(三者皆參加)

$= 30\% - 5\% - 10\% + 2\% = 17\%$

(c) P(足球∪籃球)

$= P$(足球) $+ P$(籃球) $- P$(足球∩籃球)

$= 30\% + 20\% - 5\% = 45\%$

(d) P(只參加足球 | 至少參加一項運動)

$$= \frac{P(\text{只參加足球})}{P(\text{至少參加一項運動})} = \frac{17\%}{52\%} = \frac{17}{52}$$

(e) P(足球∪籃球 | 至少參加一項運動)

$$= \frac{P(\text{足球}\cup\text{籃球})}{P(\text{至少參加一項運動})}$$

$$= \frac{30\% + 20\% - 5\%}{52\%} = \frac{45}{52}$$

13. (1) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}$

(2) $P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$

(3) $P(A^c|B^c) = \dfrac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)} = \dfrac{P(A^c\cap B^c)}{1-P(B)}$

但$P(A^c\cap B^c) = P(A\cup B)^c = 1 - P(A\cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B)$

$= \dfrac{7}{12}$

94.6.7 三校

$$\therefore P(A^c|B^c) = \frac{\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{7}{9}$$

(4) $P(B^c|A^c) = \dfrac{P(A^c \cap B^c)}{1-P(A)} = \dfrac{\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{7}{8}$

14. 已知 A 與 B 為獨立事件，則 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(1) 又 $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ 其中 $(A \cap B)$ 與 $(A \cap B^c)$ 為互斥事件，

$\therefore P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B^c)] = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

因此，$P[(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) - P(A)P(B)$

$= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$得證。

(2) A^c 與 B 為獨立事件的證明類似

(3) $P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)]$

$= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(A^c) \cdot P(B^c)$

15. (a) P(班長為男生) $= 17\% + 23\% = 40\%$

(b) P(班長為女生) $= 38\% + 22\% = 60\%$

(c) P(班長為修行銷學的學生) $= 17\% + 38\% = 55\%$

(d) P(班長為男生或修行銷學學生)

$= 40\% + 55\% - 17\% = 78\%$

(e) P(班長為男生且修行銷學) $= 17\%$

(f) P(選修行銷學 | 班長為男生)

$$= \frac{P(\text{班長為男生且選修行銷學})}{P(\text{班長為男生})} = \frac{17}{40}$$

P(未選修行銷學 | 班長為男生)

$= \dfrac{P(\text{班長為男生且未修行銷學})}{P(\text{班長為男生})} = \dfrac{23}{40}$

16. (a) P(一骰子出現 4 點)

$= P$(紅骰子出現 4 點或白骰子出現 4 點) $= \dfrac{11}{36}$

P(另一骰子為 5| 一骰子出現 4 點)

$= \dfrac{P)\text{一骰子為 }4\cap\text{另一骰子為 }5)}{P)\text{一骰子出現 }4\text{ 點})}$

$= \dfrac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}}{\frac{11}{36}} = \dfrac{2}{11}$

(b) P(兩骰子點數和大於 7| 一骰子出現 4 點)

$= \dfrac{P(\text{和大於 }7\cap\text{一骰子出現 }4\text{ 點})}{P(\text{一骰子出現 }4\text{ 點})}$

$= \dfrac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}} = \dfrac{5}{11}$

17. $P(A) = 0.39 \quad P(B) = 0.21$

$P(A\cup B) = 0.47$

(a) $P(A^c\cap B^c) = 1 - P(A\cap B) = 0.53$

(b) $P(A^c\cap B) = 1-(P(A)+P(A^c\cap B^c)) = 1-0.39-0.53 = 0.08$

(c) $P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = 0.6-0.47 = 0.13$

(d) $P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.13}{0.39} = \dfrac{1}{3}$

(e) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.13}{0.21}=\dfrac{13}{21}$

18. (a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.3+0.6-0.18=0.72$

(b) $P(A^c\cup B^c)=P(A\cap B)^c=1-P(A\cap B)=1-0.18=0.82$

(c) $P(A^c\cap B^c)=P(A\cup B)^c=1-P(A\cup B)=1-0.72=0.28$

(d) $P(A\cap B)=0.18\neq 0$。，所以 A， B 不為互斥事件

(e) $P(A\cap B)=0.18\neq P(A)\cdot P(B)=0.3\times 0.6=0.18$，所以 A， B 獨立。

19. $P(A)=\dfrac{3}{14}, P(B)=\dfrac{1}{6}, P(C)=\dfrac{1}{3}$

$P(A\cap C)=\dfrac{1}{7}$

$P(B|C)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(C)}=\dfrac{5}{21}$

(a) $P(A|C)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}=\dfrac{3}{7}$

(b) $P(C|A)=\dfrac{P(C\cap A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{13}{14}}=\dfrac{2}{13}$

(c) $P(B\cap C)=P(B|C)P(C)=\dfrac{5}{21}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{63}$

(d) $P(C|B)=\dfrac{P(B\cap C)}{P(B)}=\dfrac{\frac{5}{63}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{10}{21}$

20. P(已婚男性看 TV) = 0.4 $P(A)=0.4$

P(已婚女性看 TV) = 0.5 $P(B)=0.5$

P(先生看電視 | 已婚女性看電視) = 0.7 , $P(A|B)=0.7$

(a) P(已婚夫婦皆看 TV) $= P(A \cap B)$

$=P$(已婚女性看 TV∩先生亦看 TV)

$=P$(先生亦看 TV| 已婚女性看 TV)P(已婚女性看 TV)

$= 0.7 \times 0.5 = 0.35 = P(A|B) \cdot P(B)$

(b) P(太太亦看 TV| 已婚男性看 TV)

$= \dfrac{P(\text{已婚夫婦皆看 TV})}{P(\text{已婚男性看 TV})} = \dfrac{0.35}{0.4} = \dfrac{7}{8}$

(c) P(已婚夫婦中至少一人看 TV)

$=P$(已婚男性看 TV) $+ P$(已婚女性看 TV)

$-P$(已婚夫婦皆看 TV)

$= 0.4 + 0.5 - 0.35 = 0.55$

21. 設 A 表第一個子系統可正常運轉之事件

設 B 表第二個子系統可正常運轉之事件

$P(A) = 0.98 \quad P(B) = 0.95$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.98 \times 0.95 = 0.931$

22. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.98 + 0.95 - 0.931 = 0.999$

23. 設 A 與 B 分別表示第一道與第二道漏檢的事件，則

$P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B|A) = (0.1)(0.2) = 0.02$

24. 設 A 代表利率上升的事件，B 代表股票價格指數下跌的事件，已知 $P(A) = 0.8$，$P(A^c) = 0.2$，$P(B|A) = 0.9$，$P(B|A^c) = 0.4$

因此，$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

$= P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)$

$= 0.8 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 = 0.8$

25. (a) $P(A) = 0.12 + 0.08 + 0.05 = 0.25$

$P(A \cap M) = 0.08$

$P(M) = 0.33$

$P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M)$

$= 0.25 + 0.33 - 0.08 = 0.5$

(b) $P(A)P(M) = 0.25 \times 0.33 = 0.825 \neq P(A \cap M) = 0.08$

$\therefore A$ 與 M 不為獨立事件

26. $P(E_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(E_2) = \frac{1}{2}$

$P(E_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(a) $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{8} = P(E_1)P(E_2)$

$\therefore E_1, E_2$ 獨立

(b) $P(E_1 \cap E_3) = P(E_3) = \frac{1}{8} \neq P(E_1)P(E_3)$

$\therefore E_1, E_3$ 不互相獨立

27. $P(E_1) = P(HHT) + P(HHH) = 0.25$

$P(E_2) = P(HHH) + P(HTH) + P(THH) + P(TTH) = 0.5$

$P(E_3) = P(HHH) = 0.15$

(a) $P(E_1 \cap E_2) = P(HHH) = 0.15 \neq P(E_1)P(E_2) = 0.125$

$\therefore E_1, E_2$ 不獨立

(b) $P(E_1 \cap E_3) = P(E_3) = P(HHH) = 0.15 \neq P(E_1)P(E_3)$

$= 0.0375$

$\therefore E_1, E_3$ 不獨立

94.6.7 三校

28. 設 A 表患有肺結核之事件

A^c 表未患有肺結核之事件

B 表 X 光顯示有肺結核之事件

B^c 表 X 光顯示無肺結核之事件

$$P(B|A)=\frac{90}{100}$$

$$P(B|A^c)=\frac{1}{100}$$

$$P(A)=\frac{1}{1000}\ \Rightarrow\ P(A^c)=\frac{999}{1000}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{1000}\times\frac{90}{100}}{\frac{1}{1000}\times\frac{90}{100}+\frac{999}{1000}\times\frac{1}{100}}=\frac{10}{121}$$

29. P(會計部門 | 男性) = 12%

P(會計部門 | 女性) = 20%

P(男性 | 會計部門)

$$=\frac{P(\text{會計部門}\cap\text{男性員工})}{P(\text{會計部門}|\text{男性})P(\text{男})+P(\text{會計部門}|\text{女性})P(\text{女})}$$

$$=\frac{\frac{12}{100}\times\frac{25}{75+25}}{\frac{12}{100}\times\frac{75}{75+25}+\frac{20}{100}\times\frac{25}{100}}=\frac{9}{14}$$

$$P(\text{女性}|\text{會計部門})=\frac{\frac{20}{100}\times\frac{25}{100}}{\frac{12}{100}\times\frac{75}{75+25}+\frac{20}{100}\times\frac{25}{100}}=\frac{5}{14}$$

或： $75\times 12\%=9$

$25\times 12\%=5$

$$\therefore\ P(\text{男性}|\text{會計部門})=\frac{9}{14}$$

$P(\text{女性}\,|\,\text{會計部門}) = \frac{5}{14}$

30. 不良品機率$P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) + P(A_3 \cap D)$

$= a \times 2b + a \times b + 3a \times b = 6ab$

$$P(A_1|D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{2ab}{6ab} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2|D) = \frac{P(A_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{ab}{8ab} = \frac{1}{6}$$

$$P(A_3|D) = \frac{P(A_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{3ab}{6ab} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ A_3機器的機率最大，A_2機器的機率最小。

31. (a) 設 A：威盛電子股票上漲；B：南亞塑膠股票上漲。

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$；則代表 A、B 事件相互獨立

$\because$ $0.48 \neq 0.75 \times 0.6$

$\therefore$由此可知，兩家公司的股票漲跌情形不獨立。

(b) $\because$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.75 + 0.6 - 0.48$

$= 0.87$

(c) $P(B^c|A^c) = \frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(A^c \cup B^c)}{1 - P(A)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)}$

$= \frac{1 - 0.87}{0.25} = 0.52$

(d) $P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.6 - 0.48}{0.6}$

$= 0.2$

32. (a) 設 A：受僱於工廠；B：印籍

94.6.7 三校

由題意可知：$P(A)=0.7$，$P(A^c)=0.3$，$P(B|A)=0.4$，$P(B|A^c)=0.85$

$\therefore P(B\cap A)=P(B|A)P(A)=0.4\times 0.7=0.28$

$P(B\cap A^c)=P(B|A)P(A^c)p(A^c)=0.85\times 0.3=0.255$

$\Rightarrow\ P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^c)=0.28+0.255=0.535$

(b) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.28}{0.535}=0.523$

33. 設 A 表在甲校比賽足球之事件

A^c 表在乙校比賽足球之事件

B 表甲校獲勝的事件

則　$P(A)=55\%$　　$P(A^c)=45\%$

$P(B|A)=0.8$　　$P(B|A^c)=0.65$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A^c)P(A^c)}$$

$$=\frac{0.8\times\frac{55}{100}}{0.8\times\frac{55}{100}+0.65\times\frac{45}{100}}=0.60$$

$P(A^c|B)=1-0.6=0.4$

34. (a) $P(\text{紅球})=P(\text{紅球}|1\text{號盒})P(1\text{號盒})$

$+P(\text{紅球}|2\text{號盒})P(2\text{號盒})$

$+P(\text{紅球}|3\text{號盒})P(3\text{號盒})$

$$=\frac{2}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

(b) $P(3\text{號盒抽出}|\text{紅球})=\dfrac{P(\text{紅球}|3\text{號盒})P(3\text{號盒})}{P(\text{紅球})}$

94.6.7 三校

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$$

35. 定義：A_1，A_2，A_3，A_4分別表示一，二，三，四年級的學生。B：有兼家教

$$P(A_3|B)$$
$$= \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+P(A_4)P(B|A_4)}$$
$$= \frac{0.25 \times 0.3}{0.27 \times 0.2 + 0.25 \times 0.35 + 0.25 \times 0.3 + 0.23 \times 0.15}$$
$$= \frac{0.075}{0.251} = 0.3$$

36. 設 E：會英文，J：會日文，G：會德文

(a) $P(E \cup J \cup G)$

$$= P(E) + P(J) + P(G) - P(E \cap J) - P(E \cap G) - P(J \cap G)$$
$$+P(E \cap J \cap G)$$
$$= 0.5 + 0.3 + 0.1 - 0.15 - 0.05 - 0.03 + 0.01$$
$$= 0.68$$

(b) $P(E \cap J^c \cap G^c) = P(E \cap J^c \cap G^c) = P(E) - P(E \cap (J \cup G))$

$$= P(E) - P((E \cap J) \cup (E \cap G))$$
$$= P(E) - P(E \cap J) - P(E \cap G) + P(E \cap J \cap G)$$
$$= 0.5 - 0.15 - 0.05 + 0.01$$
$$= 0.31$$

(c) $P(E \cap J \cap S^c) = P(E \cap J) - P(E \cap J \cap G) = 0.15 - 0.01 = 0.14$

94.6.7三校

(d) $P(G|E\cup J\cup G)=\dfrac{P(G)}{P(E\cup J\cup G)}=\dfrac{0.1}{0.68}=0.147$

(e) $P(E\cap G|J)=\dfrac{P(E\cap G\cap J)}{P(J)}=\dfrac{0.01}{0.3}=0.033$

37. 設有 A，B 二人，A 先抽，B 後抽

A 抽中獎的機率 $P(A)=\dfrac{m}{m+n}$

B 後抽，則 B 抽中獎的機率為 $P(B)$

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B\cap A)+P(B\cap A^c)\\&=P(A)\cdot P(B|A)+P(A^c)\cdot P(B|A^c)\\&=\left(\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{m-1}{m+n-1}\right)+\left(\frac{n}{m+n}\right)\left(\frac{m}{m+n-1}\right)\\&=\frac{m}{m+n}\end{aligned}$$

由此可知，先抽與後抽其抽中獎的機率相等。

38. S 代表好球，B 代表壞球：

(a)

事件	P(事件)	$P(S|$事件$)$	$P(SSS|$事件$)$	$P($事件$\cap SSS)$	$P($事件$|SSS)$
正常	0.75	0.85	0.6141	$0.6141\times 0.75=0.4606$	$0.4606/0.4713=0.9773$
失常	0.25	0.35	0.0429	$0.0429\times 0.25=0.0107$	$0.0107/0.4713=0.0227$
	1.00			0.4713	

所以，$P($正常$|SSS)=0.9773$

(b) 與 (a) 作法相似

$P(SBSSS|$正常$)=0.85\times 0.15\times 0.85\times 0.85\times 0.85=0.0783$

$P(SBSSS|$失常$)=0.35\times 0.65\times 0.35\times 0.35\times 0.35=0.00975$

$P($正常$\cap SBSSS)=0.0783\times 0.75=0.05873$

$P($失常$\cap SBSSS)=0.00975\times 0.25=0.00244$

$$\therefore P(\text{正常}|SBSSS) = \frac{0.05873}{0.05873 + 0.00244} = 0.9601$$

(c) 答案與 (b) 同，因其與好，壞球出現順序無關，僅與好球和壞球之個數有關。